МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

А. І. Колосов, А. В. Якунін

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У трьох частинах

Частина 1

Лінійна та векторна алгебра
Аналітична геометрія

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів усіх форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за всіма спеціальностями*)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019

УДК 512.64+514.12(042.4)

Колосов А. І. Вища математика. У 3 ч. Ч. 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія : конспект лекцій для студ. усіх форм навч. освіт. рівня «бакалавр» за всіма спец. / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 74 с.

Автори :
д-р фіз.-мат. наук, проф. А. І. Колосов,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензенти:

С. М. Ламтюгова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова;

О. О. Аршава, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики (Харківський національний університет будівництва та архітектури)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 8 від 07.02.2019.

Конспект лекцій подано в стислому вигляді з відображенням основних складників дисципліни для концентрації уваги на вузлових поняттях і положеннях математичного апарату. Послідовність, форма та стиль викладення відповідають усталеній структурі, наповненню та теоретичному рівню програм із вищої математики технічного університету.

Опрацювання студентами поданого матеріалу сприятиме підготовці до занять, заліків та іспитів із курсу вищої математики.

ЗМІСТ

1 ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Лекція 1.1 Визначники та їх властивості

План

1.1.1 Означення визначника. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника.

1.1.2 Обчислення визначника.

1.1.3 Основні властивості визначника.

Опорні поняття: *визначник, мінор і алгебраїчне доповнення, властивості визначника.*

1.1.1 Означення визначника. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника

Визначником (***детермінантом***) n***-го порядку*** називається число Δ_n, яке записується у вигляді квадратної таблиці

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що має n ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** визначника. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю*** визначника.

Головна діагональ визначника проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.1.2 Обчислення визначника

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *визначник першого порядку* Δ_1 $(n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11}: $\Delta_1 = a_{11}$;

б) *визначник* n*-го порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

(*правило «хреста» (схема на рис. 1.1*):
визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

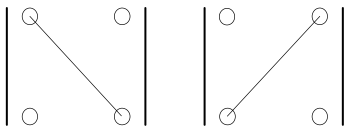
2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} -$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{23} a_{32} a_{11}$$

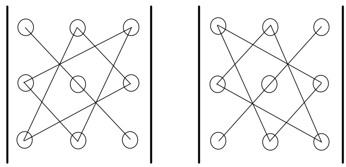
(*правило «трикутників» (схема на рис. 1.2*):

визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком «+», а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* «-»).



«+» «-»

Рисунок 1.1



«+» «-»

Рисунок 1.2

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку за правилом «хреста» : $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

$$\square \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 2 . \qquad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти мінор M_{23} й алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

$$\square \quad a_{23} = -1 \ ; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24 ;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24 . \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами першого рядка :

$$1.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}; \quad 2.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

□ $$1.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(2-0) - 2(-1-0) - 4(-3+10) = -32\,.$$

2. (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку за правилом «трикутників» :

$$1.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}; \quad 2.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

□ $$1.\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 +$$

$$+(-1)\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 9 - 3\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15\,.$$

2. (Розв'язати самостійно). ■

1.1.3 Основні властивості визначника

Зауваження 1. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду й дорівнює значенню визначника:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$$

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***;

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***.

Зауваження 2. Для розкладання визначника рекомендується вибирати такий ряд, у якому найбільше нульових елементів.

Наслідок. Визначник із нульовим рядом дорівнює нулю.

Властивість 2. Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями та навпаки.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями та навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***,

Властивість 3. Якщо поміняти місцями два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивість 4. Визначник із двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю.

Властивість 5. Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника.

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду*.

Властивість 6. Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 7. Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 , \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j .$$

Властивість 8. Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи іншого паралельного йому ряду, помножені на одне й те саме число.

Властивість 9. Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.

Лекція 1.2 Матриці та дії над ними

План

1.2.1 Означення матриці. Визначник квадратної матриці.
1.2.2 Операції над матрицями.
1.2.3 Обернена матриця та її обчислення.

Опорні поняття: *матриця, операції над матрицями, обернена матриця.*

1.2.1 Означення матриці. Визначник квадратної матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij} .

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}\,,\; i = \overline{1,m};\;\; j = \overline{1,n}\ .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** та позначається 0.

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю***.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що містяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє трикутною*** (***верхнє трикутною***)

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \;\; U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***.

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** та позначається E.

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність визначник

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою***).

Якщо визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою***).

1.2.2 Операції над матрицями

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається така матриця $C = A + B$ того самого розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць

$$C = A - B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C = \alpha A$ того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число

$$C = \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Таким чином, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

Приклад 1. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = 2A - 3B.$$

$$\square \quad 2A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad 3B = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} -19 & 18 & -17 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B

$$C_{m\times n} = A_{m\times p}B_{p\times n} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,,\ \ i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\ .$$

Приклад 2. Для заданих матриць A і B узгоджених розмірів знайти добутки AB і BA

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ $$C_{2\times 2} = A_{2\times 3}\, B_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-4)\cdot 4 & -2\cdot(-1) + 3\cdot 0 + (-4)\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-5)\cdot 4 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 0 + (-5)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix};$$

$$D_{3\times 3} = B_{3\times 2}\, A_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 & 3\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & 3\cdot(-4) + (-1)\cdot(-5) \\ 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 2\cdot(-4) + 0\cdot(-5) \\ 4\cdot(-2) + 1\cdot 3 & 4\cdot 3 + 1\cdot 2 & 4\cdot(-4) + 1\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 7 & -7 \\ -4 & 6 & -8 \\ -5 & 14 & -21 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки та стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

Приклад 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix};\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$

1.2.3 Обернена матриця та її обчислення

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E .$$

Теорема. Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n*-го порядку існує єдина обернена матриця* A^{-1}*, яка обчислюється за формулою*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} *– алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* A.

Приклад. Упевнитися, що дана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $A A^{-1} = E$ і $A^{-1} A = E$.

$$1.\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 2.\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ 1. $\det A = 2 \neq 0$ – матриця A невироджена.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1; \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Рівності $AA^{-1}=E$ і $A^{-1}A=E$ перевірте самостійно.

2. (Розв'язати самостійно). ■

Лекція 1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування

План

1.3.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття.

1.3.2 Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

1.3.3 Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

1.3.4 Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

Опорні поняття: *системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сумісна й несумісна системи, визначена та невизначена системи, матричний метод (метод оберненої матриці), метод Крамера, метод Гаусса.*

1.3.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із*** n ***невідомими*** x_j $(j=\overline{1,n})$ виглядає так :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\;\; j=\overline{1,\,n})$ і b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – задані числа :

a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\;\; j=\overline{1,\,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***. Для квадратної системи визначник Δ_n, складений із коефіцієнтів при невідомих, називається ***визначником системи***

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i=0$ $(i=\overline{1,\,m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один із вільних членів відмінний від нуля.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв’язку. Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв’язок єдиний, і ***невизначеною*** – в іншому разі.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв’язок $x_j=0$ $(j=\overline{1,\,n})$.

Введемо матричні позначення

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=(A\;\vdots\;B)=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n\times 1$;

A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$;

B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m\times 1$;

C – ***розширена матриця*** системи розміру $m\times(n+1)$.

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $AX=B$.

Виділимо в матриці A розміру $m\times n$ будь-які k рядків і k стовпців $\left(1\le k\le \min\{m,n\}\right)$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\,A$ матриці A розміру $m\times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Теорема Кронекера – Капеллі. *Система m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими $AX=B$ сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $C=\left(A\,\vert\,B\right)$ дорівнює рангу основної матриці A: $rank\,C=rank\,A=r$. У разі сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих $r=n$, то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих $r<n$, то система є невизначеною та має безліч розв'язків, які залежать від $n-r$ довільних сталих (параметрів*.

Якщо сумісна система є невизначеною $rank\,C=rank\,A=r<n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n-r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

Приклад. Перевірити систему на сумісність :

$$1.\ \begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=1\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=2\\ 5x_1-5x_2+8x_3-7x_4=3\end{cases};\quad 2.\ \begin{cases} 3x_1-4x_2+4x_3=-1\\ 6x_1-8_2+8x_3=-7\\ -9x_1+12x_2-12x_3=4\end{cases}.$$

□ 1. Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці $C=\left(A \mid B\right)$ та переставлення стовпців тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A. Ранг основної матриці A дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці C нижче рядків трапеції всі елементи нульові, то її ранг дорівнює рангу основної матриці $rank\,C = rank\,A$. В іншому разі ранг розширеної матриці на одиницю більший $rank\,C = rank\,A + 1$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 5 & -5 & 8 & -7\end{pmatrix};\quad C=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2\\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left|\begin{array}{l}R_2 := R_2 - R_1\\ R_3 := R_3 - 5R_1\end{array}\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2\end{array}\right)\sim\left|R_3 := R_3 - 3R_2\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{array}\right)\sim\left|R_3 := -R_3/5\right|\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left|S_2 \leftrightarrow S_4\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Звідси $rank\,A = 2$; $rank\,C = 3$.

Оскільки $rank\,C \neq rank\,A$, то система несумісна.

2. $rank\,A = 1$; $rank\,C = 2$ (Обчислення провести самостійно).

Оскільки $rank\,C \neq rank\,A$, то система несумісна. ■

1.3.2 Розв’язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Теорема. Якщо основна матриця A *квадратної системи* $AX = B$ *невироджена (тобто,* $\det A \neq 0$*), то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою*

$$X = A^{-1}B.$$

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B; \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B;$$

$$EX = A^{-1}B; \quad X = A^{-1}B. \quad \blacksquare$$

Приклад. Розв’язати квадратну систему

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = -7 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = -4 \end{cases}$$

за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***).

□ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $AX = B$;

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ – матриця A невироджена.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-16;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7; \qquad A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & -16\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B; \quad X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & -16\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 0\\ -4\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7+0-4\\ -70+0+64\\ 28+0-28\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}; \quad \begin{matrix}x=-1\\ y=2\\ z=0\end{matrix} \qquad \blacksquare$$

1.3.3 Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Розв'язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

Теорема ***(правило Крамера)****. Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою*

$$x_j=\Delta_n^{(j)}/\Delta_n, \qquad j=\overline{1,n},$$

де $\Delta_n^{(j)}$ – допоміжний визначник, одержаний з основного визначника Δ_n заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_n^{(j)}=\begin{vmatrix}a_{11}\ldots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\ldots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)}\ldots a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}\ldots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати квадратну систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}.$$

$$\square \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8; \quad x = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

$$y = \Delta^{(2)} / \Delta = 0/-4 = 0; \quad z = \Delta^{(3)} / \Delta = 8/-4 = -2. \quad \blacksquare$$

1.3.4 Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо довільну прямокутну систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця, а C – розширена матриця цієї системи. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці C і переставленню стовпців тільки основної матриці A відповідають такі рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Метод Гаусса дослідження та розв’язування СЛАР складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Спочатку виділяють перше рівняння й відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять перше рівняння на $a_{11} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно перше невідоме з другого рівняння, потім із третього рівняння і так долі до останнього найнижчого. Виділяють друге рівняння та відповідно друге невідоме. Припустимо, що $a_{22} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять друге рівняння на $a_{22} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно друге невідоме з третього рівняння, потім із четвертого рівняння і так далі до останнього найнижчого. Цей процес продовжують доти, доки не дійдуть до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння та всі рівняння, що лежать нижче нього, мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

У наслідок цього система зводиться до східчастої форми

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \tilde{x}_r + \tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+2} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m \end{cases}.$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\tilde{b}_j$ $\left(j=\overline{r+1,\,m}\right)$ відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв'язків.

Якщо всі вказані вільні члени дорівнюють нулю $\tilde{b}_j=0$ $\left(j=\overline{r+1,\,m}\right)$, то система сумісна і $rank\,A=rank\,C=r$. Перші r невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j=\overline{1,\,r}\right)$ є базисними, а решта $n-r$ невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j=\overline{r+1,\,n}\right)$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гаусса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри) $\tilde{x}_j=C_{j-r}$ $\left(j=\overline{r+1,\,n}\right)$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0=0$). Переносять в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння та визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і так далі, доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

Зауваження. Прямий хід методу Гаусса зручно виконувати в матричній формі, зводячи розширену матрицю до східчастого вигляду з верхнє трапецієвидною основною матрицею, в якій відмінні від нуля елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гаусса :

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-6. \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=5 \end{cases}$$

$$\square\ \textit{Прямий хід}:\ \begin{array}{cccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2:=R_2-2R_1 \\ R_3:=R_3-3R_1 \end{array}\right| \sim$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -1 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2/4 \\ R_3 := R_3 - R_2 \end{array}\right| \sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\
\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7/4 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).
\end{array}
$$

Оскільки останньому рядку відповідає рівняння з нульовими коефіцієнтами й відмінним від нуля вільним членом, то система несумісна (не має розв'язків). ■

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса :

$$
\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases} .
$$

□ *Прямий хід* :

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim |S_1 \leftrightarrow S_2| \sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\
\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array}\right| \sim
\end{array}
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\
0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\
0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21
\end{array}\right)
\end{array}\sim\left|R_2 := -R_2/4\right|\sim
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\
0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\
0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21
\end{array}\right)
\end{array}\sim\left|\begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2\\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array}\right|\sim
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7
\end{array}\right)
\end{array}\sim\left|R_3 \leftrightarrow R_4\right|\sim
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\
0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}\sim\left|S_3 \leftrightarrow S_5\right|\sim
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4\\
0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Система сумісна, але невизначена і

$$rank\,C = rank\,A = r = 3 < n = 5.$$

Тут x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

Зворотний хід.

Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри)

$$x_4 = C_1; \quad x_3 = C_2.$$

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 + 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 \\ x_1 + \frac{3}{4}x_5 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 \\ x_5 = -7 + 8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв'язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння :

$$x_4 = C_1; \;\; x_3 = C_2; \;\; x_5 = -7 + 8C_1; \;\; x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 -$$

$$-\frac{3}{4}x_5 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 - \frac{3}{4}\left(-7 + 8C_1\right) = 7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2;$$

$$x_2 = 4 + C_1 - 2C_2 - 3x_1 - 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 -$$

$$-3\left(7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2\right) - 2\left(-7 + 8C_1\right) = -3 - \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2.$$

Отже, загальний розв'язок виглядає так :

$$x_1 = 7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2; \;\; x_2 = -3 - \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2; \;\; x_3 = C_2;$$

$x_4 = C_1$; $x_5 = -7 + 8C_1$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Поклавши $x_3 = C_2 = 0$ і $x_4 = C_1 = 0$, отримуємо опорний розв'язок

$$x_1 = 7; \;\; x_2 = -3; \;\; x_3 = 0; \;\; x_4 = 0; \;\; x_5 = -7. \quad \blacksquare$$

Лекція 1.4 Однорідна квадратна система. Власні вектори та власні числа

План

1.4.1 Однорідна квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.4.2 Власні вектори та власні числа квадратної матриці.

Опорні поняття: *умова наявності ненульових розв'язків однорідної квадратної системи, власні числа та власні вектори.*

1.4.1 Однорідна квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі однорідна прямокутна СЛАР $AX = 0$ завжди сумісна і має тривіальний (нульовий) розв'язок $X = 0$, бо ранг розширеної матриці $C = \left(A \mid 0\right)$ дорівнює рангу основної матриці A. Нульовий розв'язок $X = 0$ єдиний, якщо цей спільний ранг дорівнює числу невідомих. В іншому разі СЛАР має безліч розв'язків.

З наведених міркувань для квадратної СЛАР випливає така *теорема*. *Однорідна квадратна система* $AX = 0$ *має ненульовий розв'язок (має безліч розв'язків) тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю* $\det A = 0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок.*

Приклад. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв'язків. Знайти її загальний розв'язок і будь-який ненульовий частинний розв'язок.

$$1.\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}; \qquad 2.\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\square\ 1.\ \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Отже, система має безліч розв'язків. Розв'яжемо систему методом Гаусса.

$$\text{\textit{Прямий хід}}: \; C = \left(A \;\vdots\; 0\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := R_3 - R_2\right| \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left|R_2 := R_2/6\right| \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $rank\, C = rank\, A = r = 2 < n = 3$.

Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

Зворотний хід.

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр)

$$x_3 = C.$$

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2x_3 \\ \quad\quad x_2 = (5/6)x_3 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$$x_3 = C; \;\; x_2 = (5/6)\, C; \;\; x_1 = 2x_2 - 2C = 2 \cdot (5/6)\, C - 2C = -(1/3)\, C.$$

Отже, загальний розв'язок

$$x_1 = -(1/3)\, C; \quad x_2 = (5/6)\, C; \quad x_3 = C, \quad C \in R.$$

Покладемо $C = 6$. Тоді маємо ненульовий частинний розв'язок $x_1=-2$; $x_2=5$; $x_3=6$.

2. (Розв'язати самостійно). ■

1.4.2 Власні вектори та власні числа квадратної матриці

Матрицю-стовпець X розміру $n\times1$ також називають n -вимірним вектором.

Нехай A – квадратна матриця n -го порядку. Якщо існують ненульовий вектор X ($X\neq0$) і число λ такі, що виконується рівність

$$AX=\lambda X,$$

то говорять, що λ – ***власне число*** матриці A, а X – її ***власний вектор***, який відповідає власному числу λ.

Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор.

Указане матричне рівняння можна подати у вигляді

$$AX=\lambda EX\ ;\quad (A-\lambda E)X=0.$$

Отримана однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок X тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю $\det(A-\lambda E)=0$. Одержане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Відповідний многочлен $f(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A.

Власні числа λ_j $(j=\overline{1,n})$ *є коренями характеристичного рівняння.*

Власні числа можуть бути дійсними чи комплексними, простими чи кратними.

Якщо відоме деяке власне число λ, то з однорідної системи

$$(A-\lambda E)X=0$$

можна знайти відповідні власні вектори.

Зауваження 1. Власні вектори визначаються з точністю до ненульового сталого множника.

Приклад 1. Знайти власні числа λ_1, λ_2 та власні вектори X_1, X_2 заданої матриці:

$$1.\ A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}; \qquad 2.\ A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

□ 1. Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)=0; \quad \begin{vmatrix}-2-\lambda & 4\\ 5 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$\lambda^2-4\lambda-32=0; \quad \lambda_1=-4; \quad \lambda_2=8.$$

З однорідної системи

$$(A-\lambda E)X=0; \quad \begin{cases}(-2-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(6-\lambda)x_2=0\end{cases}, \quad \text{де } X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори.

При $\lambda_1=-4$ маємо

$$\begin{cases}\left(-2-(-4)\right)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+\left(6-(-4)\right)x_2=0\end{cases}; \quad x_1=-2t; \quad x_2=t; \quad t\in R,$$

де t – параметр. Тоді $X_1=\begin{pmatrix}-2t\\ t\end{pmatrix}$.

При $\lambda_2=8$ маємо

$$\begin{cases}(-2-8)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(6-8)x_2=0\end{cases}; \quad x_1=2t; \quad x_2=5t; \quad t\in R; \quad X_2=\begin{pmatrix}2t\\ 5t\end{pmatrix}.$$

2. (Розв’язати самостійно). ■

Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. Якщо у довільний многочлен $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$ замість змінної x підставити матрицю A, то отримаємо матрицю

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\ldots+a_{m-1}A+a_mE,$$

яка називається ***многочленом від матриці*** A (***матричним много-***

членом).

Зауваження 2. Над многочленами від однієї і тієї ж матриці A можна здійснювати алгебраїчні дії як над звичайними многочленами.

Теорема Келі – Гамільтона. *Довільна квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена*.

Приклад 2. Перевірити, що задана матриця є коренем свого характеристичного многочлена:

$$1.\ A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix};\ \ 2.\ A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

□ 1. Знаходимо характеристичний многочлен матриці A :

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-10\,.$$

Обчислимо

$$f(A)=A^2-3A-10E=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 9 & 16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 12\\ 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$$1.\ A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix};\ \ 2.\ A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Знаходимо характеристичний многочлен матриці A :

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=-\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+3\,.$$

Тоді

$$f(A)=-A^3+2A^2-2A+3E==\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(Обчислення проведіть самостійно). ■

Лекція 1.5 Вектори й операції над ними

План

1.5.1 Скалярні та векторні величини. Лінійні операції над векторами.

15.2 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів.

1.5.3 Векторний добуток векторів. Площа трикутника.

1.5.4 Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів.

Опорні поняття: *скалярні та векторні величини, додавання (віднімання) векторів, множення вектора на число, координати вектора, розклад вектора за координатним базисом, довжина вектора, умова колінеарності векторів, поділ відрізка у заданому відношенні, скалярний добуток, умова перпендикулярності двох векторів, векторний добуток, площа трикутника, мішаний добуток, об’єм піраміди, умова компланарності трьох векторів.*

1.5.1 Скалярні та векторні величини. Лінійні операції над векторами

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють ***декартову прямокутну систему координат*** у просторі (рис. 1.3). Ox називається ***віссю абсцис***, Oy – ***віссю ординат***, а Oz – ***віссю аплікат***. Три взаємно перпендикулярні координатні площини Oxy, Oxz і Oyz ділять весь простір на вісім частин (***октантів***). Сукупність площин, які перпендикулярні координатним осям, утворює просторову ***координатну сітку***.

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x;y;z)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***, z – ***апліката***). Для знаходження цих координат через точку $M(x;y;z)$ проведемо три площини, які перпендикулярні координатним осям. Вони перетинають відповідні осі у точках $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$ і $M_z(0;0;z)$.

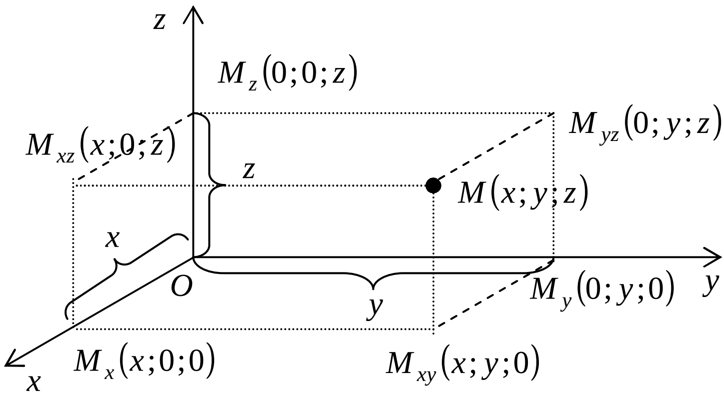


Рисунок 1.3

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

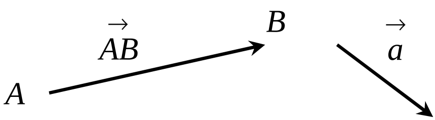


Рисунок 1.4

Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, в якому вказано його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 1.4).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$.

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Зауваження 1. Надалі будемо розглядати тільки ***вільні вектори***, для яких вибір положення початку не має значення. Вільний вектор цілком характеризується модулем і напрямком.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) вектори колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 1.5) або за правилом паралелограма (рис. 1.6).

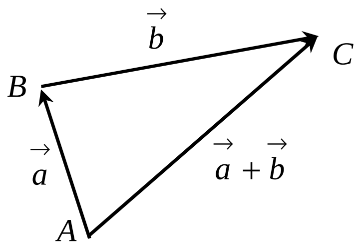


Рисунок 1.5

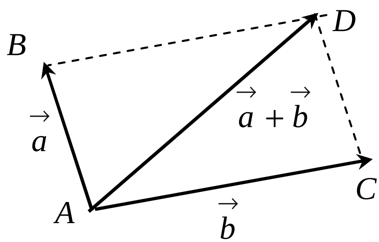


Рисунок 1.6

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні умови: 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3) якщо $\lambda > 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$; якщо $\lambda = 0$, то $0\vec{a} = \vec{0}$.

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$. При цьому $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Різниця $\vec{a}-\vec{b}$ обчислюється за формулою $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}; \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c});$$

$$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda; \quad (\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a}); \quad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}; \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}; \quad 1\vec{a}=\vec{a}.$$

Проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\vec{a}$ і обчислюється за формулою $np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0\le\varphi\le\pi$ (рис. 1.7).

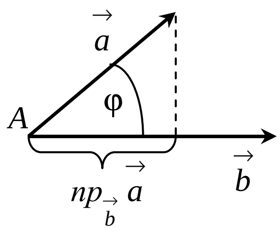


Рисунок 1.7

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 1.8). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих вздовж додатного напрямку відповідно осей Ox, Oy і Oz, утворює ***координатний базис*** $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$ (рис. 1.8). Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x = np_{Ox}\,\vec{a}\,; \quad a_y = np_{Oy}\,\vec{a}\,; \quad a_z = np_{Oz}\,\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{a} = \vec{a}\left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$.

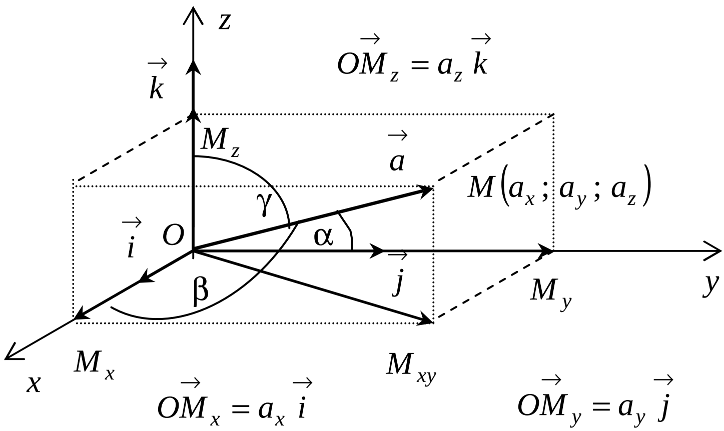


Рисунок 1.8

Координатні орти виглядають так :

$$\vec{i}\,(1;\,0;\,0), \quad \vec{j}\,(0;\,1;\,0), \quad \vec{k}\,(0;\,0;\,1).$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ – вільний, то його можна відкладати від довільної точки, зокрема, від початку координат O. Тоді вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ слугує ***радіусом-вектором*** точки $M\left(a_x;\, a_y;\, a_z\right)$.

Радіус-вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|\,\vec{OM}_x\,| = |\,a_x\,|$, $|\,\vec{OM}_y\,| = |\,a_y\,|$ і $|\,\vec{OM}_z\,| = |\,a_z\,|$.

Тому $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. *Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.*

Кути α, β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з осями Ox, Oy і Oz, називаються ***напрямними кутами***, а

$$\cos\alpha = a_x \big/ |\vec{a}|; \quad \cos\beta = a_y \big/ |\vec{a}|; \quad \cos\gamma = a_z \big/ |\vec{a}|$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зі співвідношень $\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM}_{xy} + \vec{OM}_z = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + {}$ $+ \vec{OM}_z$ і $\vec{OM}_x = a_x \vec{i}$; $\vec{OM}_y = a_y \vec{j}$; $\vec{OM}_z = a_z \vec{k}$, одержимо $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ – ***розклад вектора за координатним базисом*** $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Зі співвідношення $\vec{M_1 M_2} = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_1$ маємо

$\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$. Тобто *координати вектора $\vec{M_1 M_2}$ дорівнюють різниці відповідних координат його кінця $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ і початку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$.*

Відстань між двома точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ обчислюється за формулою

$$M_1 M_2 = |\vec{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}.$$

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} ;$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) - (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} ;$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} .$$

Тобто *лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно* :

1) у разі додавання (віднімання) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються);

2) у разі множення вектора на число кожна координата множиться на це число.

Умова колінеарності (паралельності) двох векторів : *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} ; \quad \vec{a} \neq \vec{0} ; \ \vec{b} \neq \vec{0} .$$

Приклад 1. Знайти, при яких значеннях α і β ці вектори колінеарні :

$$1. \ \vec{a} = (\alpha - 2;\ 4;\ -3); \quad \vec{b} = (5;\ 3\beta;\ 6);$$

$$2. \ \vec{a} = (3;\ \beta;\ 2\alpha - 1); \quad \vec{b} = (\alpha;\ -2;\ 2).$$

□ 1. $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$; $\dfrac{\alpha - 2}{5} = \dfrac{4}{3\beta} = \dfrac{6}{-3}$;

$$(\alpha - 2)/5 = -2 ; \quad 4/(3\beta) = -2 ; \quad \alpha = -8 ; \quad \beta = -3/2 .$$

2. (Розв’язати самостійно). ■

Координати точки $M(x;\, y;\, z)$, яка ділить відрізок $M_1 M_2$ у заданому відношенні λ, починаючи від точки M_1, визначаються за формулами :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Приклад 2. Знайти точку C, яка ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -5$, починаючи від точки A :

1. $A(1;\, -8;\, 4)$, $B(-3;\, 0;\, -8)$; 2. $A(-4;\, -1;\, 2)$, $B(-2; 3;\, 3)$.

□ 1. $x = \dfrac{1 - 5\cdot(-3)}{1-5} = -4$; $y = \dfrac{-8 - 5\cdot 0}{1-5} = 2$; $z = \dfrac{4 - 5\cdot(-8)}{1-5} = 11$;

$$C(-4;\, 2;\, 11).$$

2. (Розв'язати самостійно). ■

Зауваження 2. Якщо точка M ділить відрізок $M_1 M_2$ навпіл, то $\lambda = 1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 3. Точки A і B слугують кінцями діаметра сфери. Знайти координати її центра C і радіус r :

1. $A(1;\, -4;\, 3)$, $B(3;\, 0;\, 6)$; 2. $A(-4;\, -3;\, 2)$, $B(-2; 1;\, -6)$.

□ 1. $AC = BC$: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$;

$x = \dfrac{1+3}{2} = 2$; $y = \dfrac{-4+0}{2} = -2$; $z = \dfrac{4+6}{2} = 5$; $C(2; -2; 5)$;

$$r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-(-4))^2 + (5-3)^2} = 3.$$

2. (Розв'язати самостійно). ■

1.5.2 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Властивості скалярним добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$; 4) $(\vec{a})^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Тоді

$$пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю :*

$$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні й мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2=1;\ (\vec{j})^2=1;\ (\vec{k})^2=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0;\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Звідси $\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0;\ \ \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$.

Приклад. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні :

1. $\vec{a}=(2\alpha;-5;-3);\ \vec{b}=(\alpha;-\alpha;6)$; 2. $\vec{a}=(\alpha;3;4);\ \vec{b}=(2;-\alpha;1)$.

□ 1. $\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$;

$$2\alpha\cdot\alpha+(-5)\cdot(-\alpha)+(-3)\cdot 6=0;$$

$$2\alpha^2+5\alpha-18=0;\quad \alpha_1=2;\quad \alpha_2=-9/2.$$

2. (Розв'язати самостійно). ■

1.5.3 Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.9) називається вектор, який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє наступним умовам: 1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 2) модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$.

Таким чином, модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (*геометричний зміст* векторного добутку): $|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{пар}$.

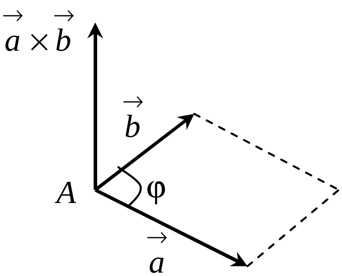


Рисунок 1.9

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо

дивитися з кінця вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a};\quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b};\cdot\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\,\|\,\vec{b}|\sin\varphi=S_{ïàð}\ .$$

Зауваження 1. Векторний добуток нульовий, якщо вектори колінеарні (зокрема, хоча б один із них нульовий).

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. *Векторний добуток не комутативний: при зміні порядку співмножників він змінює знак на протилежний, залишаючись таким же за абсолютною величиною*;

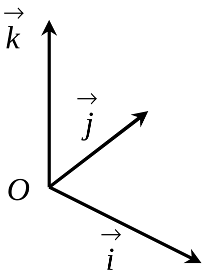


Рисунок 1.10

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\,\vec{a}\times\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 1.10), отримаємо:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0};\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0};\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ .$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді *векторний добуток двох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому перший рядок складається з координатних ортів* $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ *, другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\ .$$

Зауваження 2. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника, то з геометричного змісту векторного добутку маємо $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$.

Приклад. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами:

1. $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$;
2. $A(7;-1;0)$, $B(2;-4;-3)$ і $C(3;5;-2)$.

□ 1. $\vec{AB} = (5-1;-6-(-1);2-2) = (4;-5;0)$;

$$\vec{AC} = (1-1;3-(-1);-1-2) = (0;4;-3);$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}\ ; \quad |\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25;$$

$$S_{\Delta ABC} = (1/2)\cdot 25 = 12{,}5.$$

2. (Розв’язати самостійно). ■

1.5.4 Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Геометричний зміст: *модуль мішаного добутку* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ (рис. 1.11) :

$$V_{пар-да} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|.$$

Зауваження 1. Об’єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою $V_{SABC} = \dfrac{1}{6}\,|(\vec{SA} \times \vec{SB}) \cdot \vec{SC}\,|$.

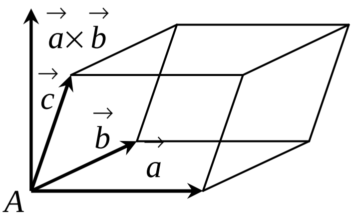


Рисунок 1.11

Мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4\,;-1;2)$, $A(5;1;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;0;3)$. Знайти її об’єм.

$$\square \quad \vec{SA} = (5-4;\,1-(-1);\,4-2) = (1;\,2;\,2);$$

$$\vec{SB} = (3-4;\,2-(-1);-1-2) = (-1;\,3;\,-3);$$

$$\vec{SC} = (0-4;\,0-(-1);\,3-2) = (-4;\,1;\,1);\quad (\vec{SA} \times \vec{SB}) \cdot \vec{SC} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54;\quad V_{SABC} = \frac{1}{6}\,|(\vec{SA} \times \vec{SB}) \cdot \vec{SC}\,| =$$

$$= (1/6) \cdot |54| = 9\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується та його об’єм дорівнює нулю. Звідси маємо ***умову компланарності трьох векторів*** : *три вектора компланарні тоді й тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю* : $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Приклад 2. Задані три точки $A(1;\,0;\,-1)$, $B(4;\,-1;\,2)$ $C(0;\,1;\,-3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $M(2;\,\alpha;\,-1)$ лежить в площині (ABC).

□ Указані чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ і $\vec{CM}$ компланарні, тобто $(\vec{AM}\times\vec{BM})\cdot\vec{CM}=0$.

$\vec{AM}=(2-1;\ \alpha-0;\ -1-(-1))=(1;\ \alpha;\ 0)$; $\vec{BM}=(2-4;\ \alpha-(-1);$

$$\vec{BM}=(2-4;\ \alpha-(-1);\ -1-2)=(-2;\ \alpha+1;\ -3);$$

$\vec{CM}=(2-0;\ \alpha-1;\ -1-(-3))=(2;\ \alpha-1;\ 2)$; $\begin{vmatrix}1 & \alpha & 0\\ -2 & \alpha+1 & -3\\ 2 & \alpha-1 & 2\end{vmatrix}=0$;

$$\alpha=1/3.\quad ■$$

Зауваження 3. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є ***лінійно незалежною*** (рівність $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ виконується лише за умови, коли всі коефіцієнти α,β,γ одночасно дорівнюють нулю) і утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\vec{d}=d_a\vec{a}+d_b\vec{b}+d_c\vec{c}\ .$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$. Числа d_a, d_b, d_c слугують ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі. Якщо відомі координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у координатному базисі, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ у скалярній формі, отримаємо систему

$$\begin{cases} a_x\, d_a + b_x\, d_b + c_x\, d_c = d_x \\ a_y\, d_a + b_y\, d_b + c_y\, d_c = d_y \\ a_z\, d_a + b_z\, d_b + c_z\, d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад 3. Перевірити, що задані три вектори

$$\vec{a} = (2; -1; 4);\ \vec{b} = (1; 0; -3);\ \vec{c} = (-2; 1; -1);\ \vec{d} = (0; -1; 10)$$

утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$:

$$\square\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 4 - 0 - 1 + 6 = 3 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис, а вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді $\vec{d} = d_a \vec{a} + d_b \vec{b} + d_c \vec{c}$ єдиним способом. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a + d_c = -1 \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases};\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3;\ \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0\,; \;\; d_a = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1\,; \; d_b = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2\,;$$

$$d_c = \Delta^{(3)} \big/ \Delta = 0/3 = 0\,. \;\blacksquare$$

Контрольні запитання до розділу 1

1. Що називається визначником?
2. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
3. За яким правилом обчислюється значення визначника n -го порядку?
4. Сформулюйте основні властивості визначника.
5. Що називається матрицею?
6. Яка матриця називається невиродженою?
7. Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число? Чим відрізняється множення матриці на число від множення визначника на число?
8. Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції?
9. Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?
10. Що називається рангом матриці?
11. Що таке елементарні перетворення матриць?
12. Які матриці називаються еквівалентними?
13. Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із n невідомими?
14. Яка система називається сумісною? Визначеною?
15. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі.
16. Як знаходиться розв’язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці?
17. Як розв’язується квадратна СЛАР методом Крамера?
18. Сформулюйте умову наявності в однорідної квадратної СЛАР ненульових розв’язків.
19. Як задається прямокутна система координат у просторі? Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
20. Що таке скалярні та векторні величини?

21. Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?

22. Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?

23. Як знаходиться проекція вектора на ненульовий вектор?

24. Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?

25. Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?

26. Як формулюється умова колінеарності двох векторів?

27. Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?

28. Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

29. У чому полягає умова ортогональності двох векторів?

30. Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

31. У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?

32. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

33. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?

34. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

35. Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в цьому базисі?

36. Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?

37. Як знаходять власні числа та власні вектори?

38. Що таке матричний многочлен?

39. Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.

2 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Лекція 2.1 Декартова прямокутна система координат на площині

План

2.1.1 Координатна пряма. Числові проміжки. Модуль дійсного числа.

2.1.2 Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні.

Опорні поняття: *координатна пряма, числовий проміжок, модуль дійсного числа, прямокутна система координат на площині, відстань між двома точками, ділення відрізка у заданому відношенні.*

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна система координат.

2.1.1 Координатна пряма. Числові проміжки. Модуль дійсного числа

Напрямлена пряма, на якій задано початок відліку O і масштаб $OE=1$, називається ***координатною прямою*** (***віссю***) (рис. 2.1).

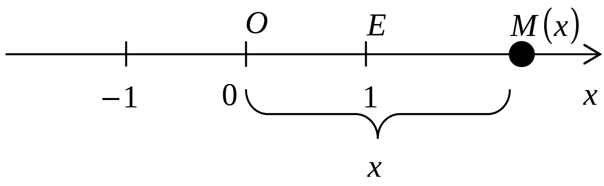


Рисунок 2.1

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** та ототожнюють із множиною дійсних чисел R: $R = (-\infty; +\infty)$.

Основні ***числові проміжки*** зображені на рисунку 2.2:
$[a; b]$ – ***відрізок***; $[a; b)$, $(a; b]$, $(-\infty; a]$, $[a; +\infty)$ – ***півінтервали***; $(a; b)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ – ***інтервали***, $a < b$.

Проміжки $[a; b]$; $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$ називаються ***скінченними***, а всі інші – ***нескінченними***. Числа a і b – їхні ***кінці***, $d = b - a$ – ***довжина***.

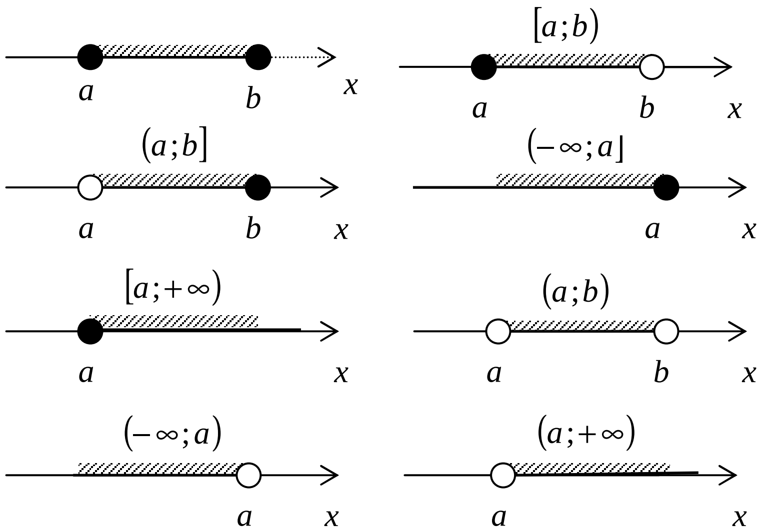


Рисунок 2.2

Модулем (***абсолютною величиною***) дійсного числа x називається невід'ємне число, яке позначається $|x|$ і визначається формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Модуль дійсного числа x дорівнює відстані відповідної точки $M(x)$ від початку відліку O (***геометричний зміст*** модуля).

Відстань між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$.

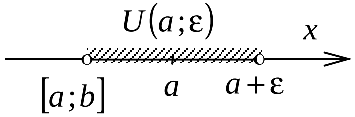


Рисунок 2.3

Інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ називається ε ***-околом числа*** a і позначається $U(a;\varepsilon)$, де ε – довільне додатне число, $\varepsilon > 0$ (рис. 2.3).

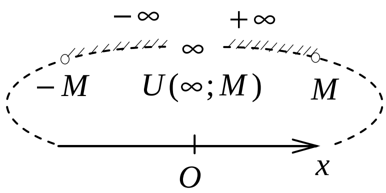


Рисунок 2.4

Зауваження. Координатну пряму Ox умовно можна вважати замкненою в нескінченно віддаленій точці ∞. Тому для довільного додатного числа M, $M > 0$ розглядають $U(\infty; M) = \{x \mid |x| > M\}$ – M ***-окіл символу нескінченності*** ∞ (рис. 2.4).

2.1.2 Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним ***початком*** O утворюють ***декартову прямокутну систему координат на площині*** (рис. 2.5). Ox називається ***віссю абсцис***, а Oy – ***віссю ординат***. Сукупність прямих, що перпендикулярні координатним осям, утворює ***координатну сітку*** на координатній площині Oxy. Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x; y)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***).

З прямокутного ΔM_1NM_2 (рис. 2.6) за теоремою Піфагора випливає, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$

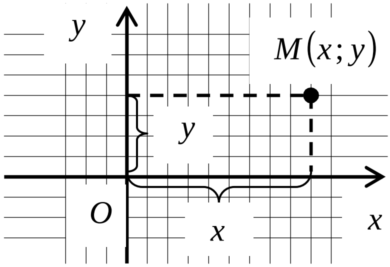


Рисунок 2.5

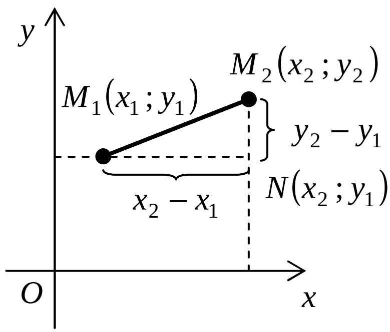


Рисунок 2.6

і $M_2(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M / MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 2.7).

Координати точки $M(x, y)$, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\ ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\ .$$

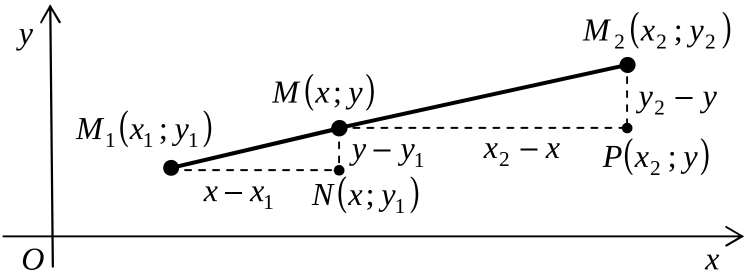


Рисунок 2.7

Зауваження. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами :

$$x = (x_1 + x_2)/2\ ; \qquad y = (y_1 + y_2)/2\ .$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-3;4)$, $B(7;-2)$, $C(5;6)$. Побудувати ΔABC у системі координат Oxy. Знайти довжину медіани AM і точку E перетину медіан.

□ M – середина сторони BC :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+5}{2} = 6; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; \quad M(6;\,2).$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-3))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85}\,.$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda = AE/EM = 2/1 = 2\,.$$

Тоді E: $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-3 + 2\cdot 6}{1+2} = 3$;

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot 2}{1+2} = 2\frac{2}{3}; \quad E\left(3;\, 2\frac{2}{3}\right). \ \blacksquare$$

Лекція 2.2 Пряма на площині. Основні типи рівняння прямої

План

2.2.1 Рівняння з двома змінними як рівняння лінії.

2.2.2 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

2.2.3 Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих.

2.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

2.2.5 Загальне рівняння прямої та його окремі випадки.

2.2.6 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

2.2.7 Відстань від точки до прямої.

Опорні поняття: *пряма на площині, основні типи рівняння прямої на площині, кут між прямими, взаємне розміщення точок і прямих на площині.*

2.2.1 Рівняння з двома змінними як рівняння лінії

Співвідношення $F_1(x, y) = F_2(x, y)$ називається ***рівнянням із двома змінними***. Його можна подати у ***стандартному вигляді*** $F(x, y) = 0$. Тут $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ і $F(x, y)$– деякі вирази.

Зображення множини розв'язків цього рівняння на координатній площині Oxy називається його ***графіком***. Звичайно графіком рівняння слугує деяка лінія. Наприклад, а) рівняння $x^2 + y^2 = 1$ задає коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R = 1$ (***дійсна лінія***); б) рівнянню $x^2 + y^2 = 0$ відповідає одна точка $O(0;0)$ (***вироджена лінія***); в) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

Зауваження 1. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

Зауваження 2. Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x, y) = 0$ або $F_1(x, y) = F_2(x, y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної y, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де t – допоміжна змінна (параметр), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази. Тоді говорять, що лінія ***задана параметрично***. Наприклад, траєкторія руху матеріальної точки в механіці часто задається в параметричній формі, при цьому роль параметра t відіграє час.

Правило 1. Щоб встановити, чи лежить указана точка $M_0(x_0, y_0)$ *на даній лінії* l: $F(x, y) = 0$, *потрібно перевірити, чи задовольняють координати точки рівняння лінії*:

$$F(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow M_0 \in l; \quad F(x_0, y_0) \neq 0 \Leftrightarrow M_0 \notin l.$$

Правило 2. Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії l_1: $F_1(x, y) = 0$, l_2: $F_2(x, y) = 0$ *і знайти точки перетину (спільні точки), потрібно скласти й розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Правило 3. Щоб скласти рівняння даної лінії потрібно : 1) *ввести систему координат;* 2) *знайти співвідношення між координатами довільної (поточної, бігучої) точки* $M(x, y)$ *цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;* 3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду.*

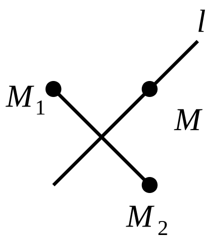


Рисунок 2.8

Зауваження 3. Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.

Приклад. Скласти рівняння серединного перпендикуляра l до відрізка M_1M_2, де $M_1(-3;4)$, $M_2(3;-1)$ (рис. 2.8).

□ Довільна точка $M(x, y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка M_1M_2:

$$M_1M = M_2M \; ; \; \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \; ;$$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} \quad \Big| \uparrow 2 \; ;$$

$$x^2+6x+9+y^2-8y+16 = x^2-6x+9+y^2+2y+1 \; ;$$

$$l: \quad 12x-10y+15=0$$ – пряма лінія. ■

2.2.2 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай ***похила пряма*** l утворює кут α із віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці $B(0; b)$ (рис. 2.9). Тангенс кута нахилу α називають ***кутовим коефіцієнтом*** k прямої l: $k = tg\,\alpha$. Число b називають ***початковою ординатою*** прямої l.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої l. У прямокутному ΔBNM $\angle MBN = \alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN} = tg\,\angle MBN \; ; \quad \frac{y-b}{x} = tg\,\alpha = k \; ; \quad y-b = kx \, .$$

Маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*** $y = kx + b$.

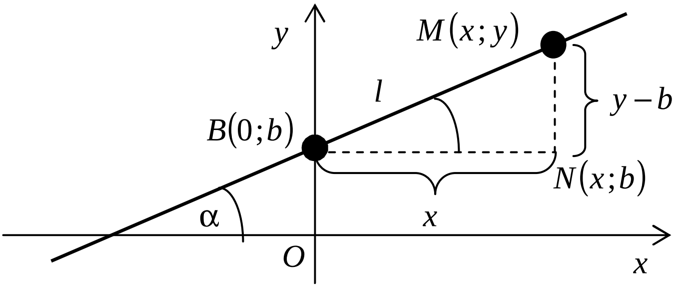


Рисунок 2.9

Зауваження 1. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (***горизонтальна***).

Зауваження 2. Якщо пряма паралельна осі Oy $(\alpha = 90^\circ)$, то її кутовий коефіцієнт не існує $(k = tg\ 90^\circ = \infty)$, отже, її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\, 0)$ із віссю Ox.

2.2.3 Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k. Тоді для прямої l маємо

$$y = kx + b; \quad M_0(x_0, y_0) \in l \;\Rightarrow\; y_0 = kx_0 + b;$$

$$b = y_0 - kx_0; \qquad y = kx + y_0 - kx_0.$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку***:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Зауваження. ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ задається сукупністю рівнянь

$$\left[\begin{array}{c} y - y_0 = k(x - x_0),\ k \in (-\infty; +\infty) \\ x = x_0 \end{array}\right. .$$

Приклад. Написати рівняння та побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_1(-3; 1)$, якщо: а) пряма паралельна осі Ox; б) пряма паралельна осі Oy; в) пряма нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв'язати самостійно).

2.2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \Rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1; -2)$, $B(-5; 1)$, $C(3; -1)$. Побудувати ΔABC у системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL.

□ $$AB = \sqrt{(-5-1)^2 + (1-(-2))^2} = 3\sqrt{5};$$

$$AC == \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{5}.$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3.$$

Тоді

$$L: \quad x = \frac{-5+3\cdot 3}{1+3} = 1; \quad y = \frac{1+3\cdot(-1)}{1+3} = -\frac{1}{2}; \quad L\left(1; -\frac{1}{2}\right);$$

$$AL: \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \quad \frac{y-(-1)}{-1/2-(-1)} = \frac{x-1}{1-1}; \quad x = 1. \ \blacksquare$$

2.2.5 Загальне рівняння прямої та його окремі випадки

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеня вигляду $Ax + By + C = 0$, де A, B і C – сталі коефіцієнти, до того ж хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження 1. Загальне рівняння прямої визначається з точністю до ненульового сталого множника.

Зауваження 2. Залежно від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки :

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Ox;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Oy.

Приклад. Похила пряма l задана своїм загальним рівнянням $2x + 3y - 12 = 0$. Знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом. (Розв’язати самостійно).

2.2.6 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рисунку 2.10, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$; $\quad tg\ \varphi = \dfrac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 \cdot tg\ \alpha_2}$.

Оскільки $tg\ \alpha_1 = k_1$; $tg\ \alpha_2 = k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою $tg\ \varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

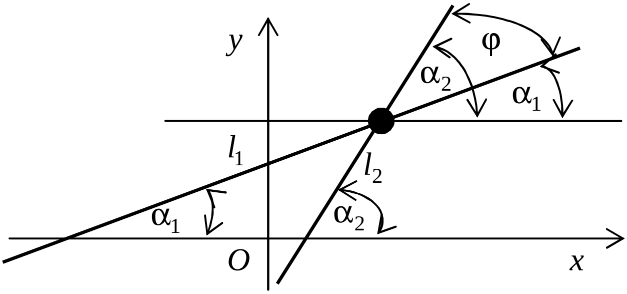


Рисунок 2.10

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\,\varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\ \varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) ***необхідною та достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 = k_2$;

2) ***необхідною та достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 k_2 = -1$.

Зауваження. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою $\varphi_г = arctg\left|(k_2 - k_1)/(1 + k_1 k_2)\right|$.

Приклад. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2;3)$. Знайти величину $\angle A$, рівняння висоти CN та рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC.

□ Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB}=-3;\ k_{AC}=2;\ \varphi_г=arctg\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=arctg\left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right|=$$

$$=arctg\,1=\pi/4. \quad \text{Тоді } \angle A=\pi-\varphi_г=\pi-\pi/4=3\pi/4.$$

$$CN\perp AB \iff k_1k_2=-1;\ k_{AB}=-3;\ k_{CN}=-1/k_{AB}=1/3;$$

$$C\in CN;\ CN:\quad y-y_0=k(x-x_0);\ y-3=\frac{1}{3}(x-2);$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}.\ \ A=AB\cap AC:\ \begin{cases} y=-3x+5 \\ y=2x-10 \end{cases};\quad A(3;-4).$$

$$M \text{ – середина сторони } AC:\ x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2};$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2};\ M(5/2;-1/2).$$

$$ML\parallel AB:\ k_{ML}=k_{AB}=-3;\ M\in ML;\ ML:$$

$$y-y_0=k(x-x_0);\ y+1/2=-3(x-5/2);\ y=-3x+7.\ \blacksquare$$

2.2.7 Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0,y_0)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (рис. 2.11). ***Відстанню*** d ***від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Склавши й розв'язавши систему рівнянь прямих l і $l_\perp$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. У результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані*** d ***від точки до прямої***:

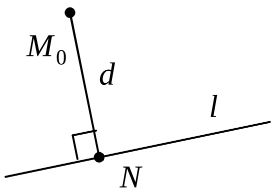


Рисунок 2.11

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

□ Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $x/4 - y/3 = 1$; $3x - 4y = 12$; $3x - 4y - 12 = 0$.

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:

$$CN = |3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-5) - 12| \big/ \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 2/5 . \ ■$$

Лекція 2.3 Площина та пряма у просторі

План

2.3.1 Основні типи рівняння площини.
2.3.2 Кут між площинами. Відстань від точки до площини.
2.3.3 Основні типи рівняння прямої у просторі.
2.3.4 Кут між прямими. Кут між прямою та площиною.

Опорні поняття: *загальне рівняння площини, рівняння площини у відрізках на осях, кут між площинами, умови паралельності та перпендикулярності двох площин, відстань від точки до площини, канонічні рівняння прямої, параметричні рівняння прямої, загальні рівняння прямої, кут між прямими, умови перпендикулярності та паралельності двох прямих, кут між прямою та площиною, умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини.*

2.3.1 Основні типи рівняння площини

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}$, $\vec{n}\perp\alpha$ (рис. 2.12). Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0).$$

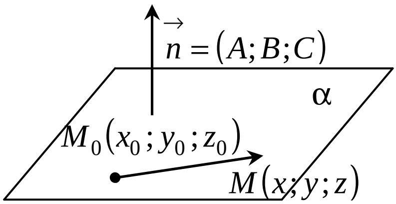


Рисунок 2.12

Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ або в координатній формі

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

– рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n}=(A;B;C)$**.**

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;1;1)$ і перпендикулярна до площин $5x+2y-z+3=0$ і $x-y+3z+7=0$.

□ Оскільки нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(5;2;-1)$ і $\vec{n}_2=(1;-1;-3)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}\,.$$

Оскільки вектор $\vec{n}_0 = (1;-2;1)$ колінеарний вектору $\vec{n} = (7;-14;7)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}_0$. Отримаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна двом заданим площинам:

$$x+1-2(y-1)+z-1=0 \Rightarrow x-2y+z+2=0. \quad \blacksquare$$

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тоді одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, до того ж хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Зауваження 1. Загальне рівняння площини визначається з точністю до ненульового сталого множника.

Теорема. Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат x, y, z. *Кожному лінійному рівнянню зі змінними* x, y, z *відповідає деяка площина.*

Приклад 2. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

□ $M \in \alpha$; $\vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha$; $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

$$\vec{n} = \overrightarrow{NP} = (1-5;\ -3-(-6);\ -1-0\ ) = (-4;\ 3;\ -1);$$

$$-4(x-1)+3(y-(-1))+(-1)(z-2)=0;$$

$$-4x+4+3y+3-z+2=0; \quad -4x+3y-z+9=0;$$

$$4x-3y+z-9=0. \quad \blacksquare$$

Нехай на площині α (рис. 2.13) задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій.

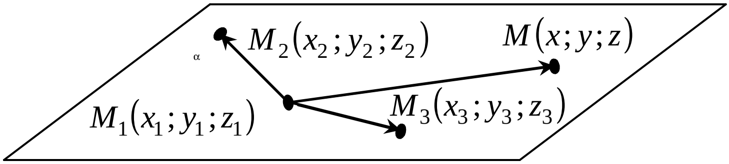


Рисунок 2.13

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x;y;z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні (рис. 96).

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$ або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

– рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад 3. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки. Знайти одиничний вектор нормалі.

□ $$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix}=0\ ;\quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0\ ;$$

$$11x+12y-8z+17=0; \quad \vec{n}=(A;B;C)=(11;12;-8);$$

$$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{11^2+12^2+(-8)^2}=\sqrt{329}; \ \vec{n}_0=\left(\frac{11}{\sqrt{329}};\frac{12}{\sqrt{329}};-\frac{8}{\sqrt{329}}\right). \ \blacksquare$$

Нехай площина α (рис. 2.14) перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$.

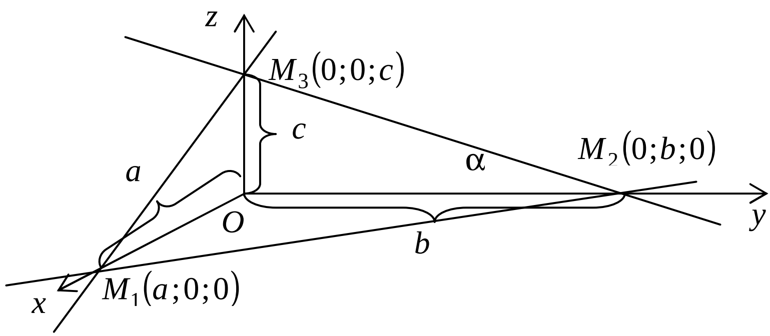


Рисунок 2.14

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0; \qquad bcx+acy+abz-abc=0;$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ -$$

рівняння площини у відрізках на осях.

Приклад 4. Звести загальне рівняння площини

$$3x-6y+8z+12=0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

$\square$ $3x-6y+8z=-12 \ \Big| :(-12)$; $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-2/3}=1$. $\blacksquare$

2.3.2 Кут між площинами. Відстань від точки до площини

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 2.15). Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

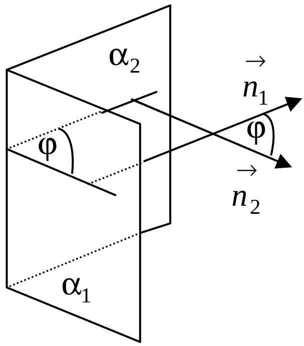


Рисунок 2.15

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Приклад 1. Знайти косинус кута між заданою площиною α_1: $2x - y - 2z + 6 = 0$ і координатною площиною Oxy.

□ $\vec{n_1} = (2; -1; -2)$; α_2: $z = 0$; $\vec{n_2} = \vec{k} = (0; 0; 1)$;

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}. \quad ■$$

Приклад 2. Переконатися, що задані дві площини α_1 і α_2 перпендикулярні :

$$\alpha_1:\ 3x - 6y + 2z - 7 = 0, \qquad \alpha_2:\ 4x + 3y + 3z - 8 = 0.$$

(Розв’язати самостійно).

Приклад 3. Перевірити, що задані дві площини α_1 і α_2 паралельні :

$$\alpha_1 :\ 5x - 2y + 3z + 35 = 0, \qquad \alpha_2 :\ 10x - 4y + 6z - 7 = 0.$$

(Розв'язати самостійно).

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 2.16).

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

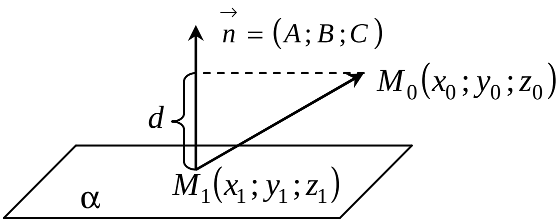


Рисунок 2.16

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад 4. Знайти відстань d від точки $M_0(2; -4; 3)$ до площини $\alpha :\ 3x - 2y - 6z - 1 = 0$. (Розв'язати самостійно).

2.3.3 Основні типи рівняння прямої у просторі

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 2.17). Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Точка M належить прямій тоді й тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо ***канонічні рівняння прямої***: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

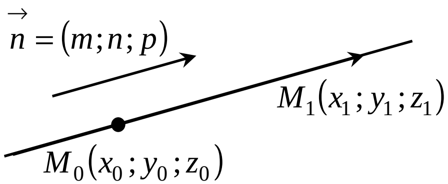


Рисунок 2.17

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$
і розв'язати їх відносно x,y та z, то отримаємо ***параметричні рівняння прямої***:

$$\frac{x-x_0}{m}=t;\quad \frac{y-y_0}{n}=t;\quad \frac{z-z_0}{p}=t;\quad \begin{cases} x=mt+x_0\\ y=nt+y_0\\ z=pt+z_0\end{cases},$$

де змінна t слугує параметром.

Приклад 1. Пряма задана своїми канонічними рівняннями. Записати її параметричні рівняння:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{-2}.\quad \text{(Розв'язати самостійно).}$$

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад 2. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв'язати самостійно).

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l є лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } \alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ називається ***загальними рівняннями прямої***.

Приклад 3. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ 3x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її канонічні рівняння та параметричні рівняння.

□ Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -2y + 4z - 10 = 0 \\ 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}; \quad y = -1; \quad z = 2; \quad M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння :

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-(-1)}{14}=\frac{z-2}{8};\quad \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}.$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}=t;$$

$$\frac{x}{-2}=t;\quad \frac{y+1}{7}=t;\quad \frac{z-2}{4}=t;\quad \begin{cases} x=-2t \\ y=7t-1 \\ z=4t+2 \end{cases}$$

– параметричні рівняння. ■

Зауваження. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно – існує ***пучок площин***, що перетинаються вздовж даної прямої.

2.3.4 Кут між прямими. Кут між прямою та площиною

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{ і }\ l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих :

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Умова паралельності двох прямих : $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями та площину α

загальним рівнянням :

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};\qquad \alpha:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Кут φ між ними (рис. 2.18) доповнює кут між напрямним вектором $\vec{s}=(m;n;p)$ прямої l і вектором нормалі $\vec{n}=(A;B;C)$ площини α до 90°. Тоді $\cos(90^\circ-\varphi)=\dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Звідки $$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

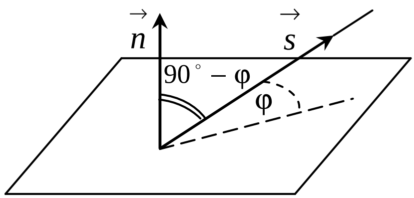


Рисунок 2.18

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини :

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Приклад 1. Знайти кут між прямою l і площиною α:

$$l:\ \begin{cases}x+4y-2z-8=0\\ 2x+3y-z+6=0\end{cases}\quad \text{і}\quad \alpha:\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

(Розв’язати самостійно).

Приклад 2. Перевірити, що пряма $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{3}$ перпендикулярна до площини $10x-4y-6z+3=0$.

(Розв’язати самостійно).

Приклад 3. Перевірити, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ паралельна площині $2x+2z-1=0$. (Розв'язати самостійно).

Контрольні запитання до розділу 2

1. Що слугує координатною сіткою декартової системи координат на площині?
2. Як обчислюється відстань між двома точками на площині?
3. За якими співвідношеннями обчислюються координати точки, що ділить даний відрізок у вказаному відношенні?
4. Як записується рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
5. Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.
6. Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
7. Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
8. Наведіть загальне рівняння прямої.
9. Як знайти гострий кут між двома похилими прямими?
10. Яка умова паралельності двох похилих прямих?
11. Яка умова перпендикулярності двох похилих прямих?
12. За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?
13. Наведіть основні типи рівняння площини.
14. Як обчислюється кут між площинами?
15. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
16. Як обчислюється відстань від точки до площини?
17. Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
18. Як обчислюється кут між прямими у просторі?
19. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
20. Як обчислюється кут між прямою та площиною?
21. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Базові

1. Бугір М. К. Математика для економістів / М. К. Бугір. – Київ : Академія, 2003. – 520 с.

2. Вища математика для електротехніків. У 3 модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін. ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009. – Модуль 1. Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова. – 2009. – 308 с.

3. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с.

4. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 240 с.

5. Кулініч Г. Л. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, Є. Ю. Таран та ін. ; ред. Г. Л. Кулініч. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – 400 с.

6. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

7. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

Допоміжні

1. Барковський В. В. Вища математика для економістів / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Київ : ЦУЛ, 2010. – 448 с.

2. Білоусова Л. І. Курс вищої математики у середовищі Maple / Л. І. Білоусова, М. М. Горонескуль. – Харків : УЦЗУ, КП «Міська друкарня», 2009. – 412 с.

3. Боднарчук Ю. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ : Києво-Могилянська академія, 2010. – 175 с.

4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів / І. П. Васильченко. – Київ : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

5. Гриньов Б. В. Вища алгебра / Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко. – Харків : Гімназія, 2008. – 182 с.

6. Домбровський В. А. Вища математика / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків та ін. ; за ред. М. І. Шинкарик. – Тернопіль : Вид-во Карп'юка, 2003. – 478 с.

7. Жильцов О. Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій / О. Б. Жильцов, Г. М. Торбін. – Київ : МАУП, 2002. – 408 с.

8. Колосов А. І. Вища математика для економістів. У 2 модулях / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ, 2014. − Модуль 1. Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. − 2014. − 237 с.

9. Лиман Ф. М. Вища математика / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко. – Суми : Університетська книга, 2012. – 614 с.

10. Липовик В. В. Вища математика для економістів / В. В. Липовик. – Кривий Ріг : Видавничий дім, 2003. – 263 с.

11. Макаренко В. О. Вища математика для економістів / В. О. Макаренко. – Київ : Знання, 2008. – 517 с.

12. Овчинников П. П. Вища математика. У 2 ч. / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко ; за заг. ред. П. П. Овчинникова. – Київ : Техніка, 2003. – Ч. 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – 2003. – 600 с.

13. Пастушенко С. М. Вища математика : довідник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – Київ : Діал, 2003. – 461 с.

14. Рибицька О. М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / О. М. Рибицька, Д. М. Білонога, П. І. Каленюк. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2013. – 124 с.

15. Травкін Ю. І. Математика для економістів / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

16. Черняк А. А. Высшая математика на базе Mathcad / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. А. Доманова. – СПб. : БХВ – Петербург, 2004. – 593 с.

17. Bird J. O. Higher engineering mathematics / J. O. Bird. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p.

18. Borakovskiy O. V. Handbook for problem solving in Higher Mathematics / O. V. Borakovskiy, O. I. Ropavka. – Kharkiv : KNMA, 2009. – 195 p.

19. Lay D. C. Linear Algebra and its Applications / D. C. Lay. – Boston, 2005. – 560 p.

Навчальне видання

$\boxed{\textbf{КОЛОСОВ}\ \text{Анатолій Іванович}}$,
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А

У трьох частинах

Частина 1

Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для студентів усіх форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за всіма спеціальностями)*

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *В. І. Шалда*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2018, поз. 110 Л.

Підп. до друку 15.04.2019. Формат 60×84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,2.
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.